O JEDNEJ ÚLOHE KONVEXNÉHO PROGRAMOVANIA

ABOUT ONE PROBLEM OF CONVEX PROGRAMMING

Róbert VRÁBEĽ

Autor: ***Mgr. Róbert Vrábeľ, PhD.***
Pracovisko: ***Ústav aplikovanej informatiky, automatizácie a matematiky***
Materiálovotechnologická fakulta v Trnave
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Adresa: ***Hajdóczyho 1, 917 01 Trnava***
E-mail: ***robert.vrabel@stuba.sk***

Abstract

V príspevku uvažujeme o konkrétnom probléme z nelineárneho programovania. Naša analýza je založená na netriviálnych metódach konvexného programovania.

We consider the concrete problem of nonlinear programming. Our analysis relies on the nontrivial methods of convex programming.

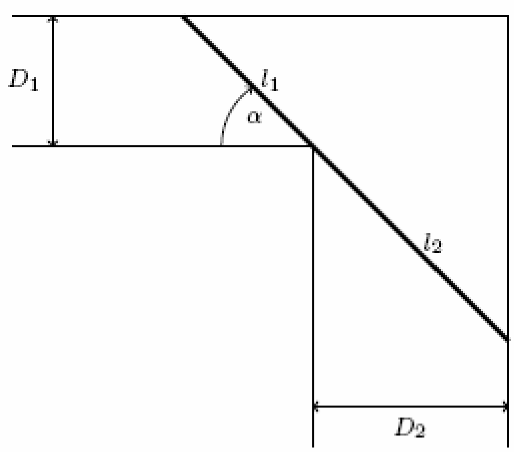
Key words

konvexné programovanie, nelineárne programovanie

convex programming, nonlinear programming

Úvod a formulácia problému

Uvažujme o nasledujúcej úlohe: Majme dva splavné kanály, ktoré sú na seba kolmé a majú šírku D_1 a D_2. Máme zistiť, aké najdlhšie brvno možno splavniť týmto kanálom! (Obrázok 1.)



Obr. 1. *Náčrt situácie*

Riešenie problému

Problém možno preformulovať nasledovne:

Nájdite max{ l : kanálom možno splavniť brvno dĺžky l ; $l > 0$ }

Alebo ekvivalentne:

Nájdite min{ l : kanálom nemožno splavniť brvno dĺžky l ; $l > 0$ }.

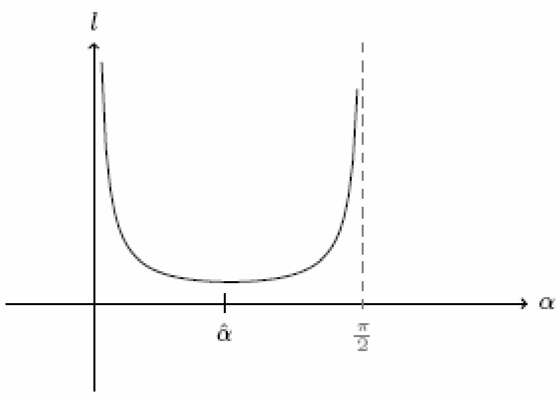
Analýzou tohto problému dospejeme k nasledujúcej úlohe konvexného (nelineárneho) programovania (teóriu nelineárneho programovania možno nájsť napr. v [2]):

Vypočítajte minimum účelovej funkcie $l(\alpha) = l_1 + l_2 = \dfrac{D_1}{\sin\alpha} + \dfrac{D_2}{\cos\alpha}$ na množine $\Omega = \left\{ -\alpha \le 0, \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

Funkcia $l(\alpha)$ má nasledovné vlastnosti:

1. $l(\alpha)$ je konvexná na konvexnej množine Ω (ľahko sa dá overiť, že $l''(\alpha) > 0$ v $\operatorname{int}\Omega$ (vnútro Ω))
2. $l(\alpha)$ a $l'(\alpha)$ sú spojité v $\operatorname{int}\Omega$
3. $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} l(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} l(\alpha) = \infty$ (t.j. funkcia $l(\alpha)$ vytvára na hranici Ω bariéru).

(Obrázok 2)



Obr. 2. *Graf funkcie l(α) =* $\dfrac{D_1}{\sin\alpha} + \dfrac{D_2}{\cos\alpha}$

Z týchto vlastností vyplýva, že funkcia $l(\alpha)$ má v množine $\operatorname{int}\Omega$ jediné lokálne minimum $\hat{\alpha}$, ktoré je zároveň globálnym minimom účelovej funkcie $l(\alpha)$ na množine Ω. Vypočítajme ho!

Z vlastností lokálnych extrémov a z vlastností funkcie $l(\alpha)$ vyplýva, že $\hat{\alpha}$ je riešením rovnice $l'(\alpha)=0$. Čiže

$$l'(\alpha) = -\frac{D_1\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{D_2\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{D_2\sin^3\alpha - D_1\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = 0$$

Teda

$$l'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow D_2\sin^3\alpha - D_1\cos^3\alpha = 0.$$

Odtiaľ postupne dostávame:

$$D_2\sin^3\alpha = D_1\cos^3\alpha$$

$$\tan^3\alpha = \frac{D_1}{D_2}$$

$$\tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{D_1}{D_2}}$$

a

$$\hat{\alpha} = \arctan\sqrt[3]{\frac{D_1}{D_2}}.$$

Použitím vzorcov([1]): $\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

vypočítame hodnotu účelovej funkcie $l(\alpha)$ v čísle $\hat{\alpha}$:

$$l(\hat{\alpha}) = \frac{D_1\sqrt{1+\left(\dfrac{D_1}{D_2}\right)^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{\dfrac{D_1}{D_2}}} + D_2\sqrt{1+\left(\dfrac{D_1}{D_2}\right)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$D_1^{\frac{2}{3}}D_2^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{D_2^{\frac{2}{3}}+D_1^{\frac{2}{3}}}{D_2^{\frac{2}{3}}}} + D_2\sqrt{\frac{D_2^{\frac{2}{3}}+D_1^{\frac{2}{3}}}{D_2^{\frac{2}{3}}}} =$$

$$D_1^{\frac{2}{3}}\sqrt{D_1^{\frac{2}{3}}+D_2^{\frac{2}{3}}} + D_2^{\frac{2}{3}}\sqrt{D_1^{\frac{2}{3}}+D_2^{\frac{2}{3}}} =$$

$$\sqrt{D_1^{\frac{2}{3}}+D_2^{\frac{2}{3}}}\left(D_1^{\frac{2}{3}}+D_2^{\frac{2}{3}}\right) = \left(D_1^{\frac{2}{3}}+D_2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Odpoveďou na problém sformulovaný v úvode článku teda je:

Najdlhšie brvno, ktoré možno splavniť dvomi na seba kolmými kanálmi so šírkami D_1 a D_2 je $\left(D_1^{\frac{2}{3}} + D_2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Záver

Prínosom práce je sformulovanie úlohy splavnosti kanála ako úlohy konvexného programovania, čo umožilo použiť účinný aparát nelineárneho programovania pre tento a podobné problémy. Otvorenou zostáva otázka splavnosti pre kanály, ktoré nie sú na seba kolmé.

Zoznam bibliografickych odkazov:

[1] BARTSCH , H. J. *Matematické vzorce*. Academia, 2006. ISBN 80-200-1448-9

[2] BAZARAA, Mokhtar S. , SHETTY, C. M. *Nonlinear programming. Theory and algorithms.* John Wiley & Sons, 1979. ISBN 0-471-78610-1