

1. (5 bodov) Každé z písmen A, B, C predstavuje inú nenulovú cifru. Pre čísla zostavené z týchto cifier platí vzťah : $AAB + ABA + CC = BAC$. Vypočítajte číslo BAC.

Riešenie: Súčet zapíšeme pod sebou

$$\begin{array}{r} AAB \\ ABA \\ \underline{CC} \\ BAC \end{array}$$

Vidíme, že $A+B=10, \dots$ Podobnými úvahami vypočítame $A=3, B=7, C=2$.

Hľadané číslo je 732.

2. (10 bodov) Koľko čísel ostane v množine $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$, ak z nej vyškrtáme všetky násobky čísel 2, 3 a 5?

Riešenie: Najmenší spoločný násobok čísel 2, 3 a 5 je 30. Keď vypíšeme čísla od 1 po 30 a vyškrtáme násobky 2, 3 a 5, ostane 8 čísel.

Po číslo 990 teda ostane $8 \cdot 33 = 264$ čísel. Zbytok opäť dopočítame ručne, остану там 2 čísla.

V množine $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ teda ostane 266 čísel.

3. (3 body) Písomku z matematiky, na ktorej boli tri príklady, písalo 35 študentov. Prvý príklad vyriešilo 22 študentov, druhý príklad vyriešilo 26 študentov, tretí príklad vyriešilo 23 študentov. Prvý aj druhý príklad vyriešilo 16 študentov, prvý aj tretí vyriešilo 14 študentov a druhý aj tretí vyriešilo 17 študentov. Všetky tri úlohy vyriešilo 10 študentov. Koľko študentov nevyriešilo žiadny príklad?

Riešenie: Najjednoduchšie je nakresliť a vyplniť Vennov diagram pre tri množiny. Z neho ľahko vidíme, že žiadny príklad nevypočítal 1 študent.

4. (7 bodov) Dva vlaky vzdialené od seba 200 km idú po jednej koľaji proti sebe, každý ide rýchlosťou 50 km/hod. Z jednej lokomotívy odštartuje mucha rovno nad koľajnicami rýchlosťou 75 km/hod. Doletí ku druhej lokomotíve, od nej sa odrazí, letí k prvej, od nej sa odrazí Poletuje medzi vlakmi dovtedy, kým sa nezrazia a nerozmliaždia ju. Koľko kilometrov mucha nalieta?

Riešenie: Vlaky sa zrazia za $200:(50+50)=$ dve hodiny. Za ten čas mucha nalieta $2 \cdot 75 = 150$ km.

5. (10 bodov) Daný je štvorec ABCD s dĺžkou strany a . Stranu BC rozdelíme bodmi P a Q na tretiny. Vypočítajte dĺžku úsečky AR, kde R je priesečník strán AQ a DP.

Riešenie: Trojuholníky ARD a PRQ sú podobné trojuholníky s pomerom strán 3:1.

$$\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = (AR)^2 \text{ z čoho vypočítame } AR = \frac{\sqrt{13}}{4}a.$$

6. (5 bodov) Študenti majú mať v piatok štyri vyučovacie hodiny: angličtinu, dejepis, matematiku a nemčinu. Pri zostavovaní rozvrhu boli dané tieto pravidlá:

- matematika a dejepis nemôžu ísť bezprostredne za sebou (v ľubovoľnom poradí)
- nemčina nemôže byť prvá hodina
- angličtina nemôže byť posledná hodina
- angličtina musí byť neskôr ako matematika.

Vyberte odpoveď, ktorá platí pre všetky rozvrhy zostavené podľa týchto pravidiel:

- a) matematika je prvá hodina
- b) dejepis je posledná hodina
- c) angličtina je skôr ako nemčina

Riešenie: Možné rozvrhy sú: MADN, MAND, MNAD.

Pre všetky rozvrhy platí iba odpoveď a).