OPTIMIERUNG DER GRÖSSE VON PRODUKTIONSKAPAZITÄT

Alexander ŠTRPKA

Autor: ***Doc. Ing. Alexander Štrpka, CSc.***
Arbeitsplatz: ***Lehrstuhl für Industrieingenieurwesen und Management, Fakultät für Materialswissenschaft und Technologie, STU***
Address: ***Pavlínska 16, 917 24 Trnava, Slovak Republik***
tel: ***00421 33 5511032-34***, *E-mail*: **strpka@mtf.stuba.sk**

Einführung

Die Bestimmung der Größen von Produktionskapazitäten der neuen Betrieben gehört zu den fundamentalen Aufgaben des Projektmanagementes. Die mehreren Bedingungen und mehreren Forderungen beeinflussen bedeutend die Größen von Produktionskapazitäten.Diese Einflüsse muß man in Betracht nehmen. Im Beitrag werden wir drei Situationen analysieren. In jeder Situation muß man über die Größen von Produktionskapazitäten der neuen Betriebe entscheiden . Die Betriebe werden derselbe Produkt produzieren.Jeder Betrieb wird auf einem anderen Platz aufgebaut werden. Im folgenden werden wir uns vor allem mit der Formulierung mathematischer Modelle dieser Optimierungsproblemen beschäftigen. Im Beitrag werden drei linearen Optimierungsmodelle formuliert. Das erste Modell kann man zur Optimierung der Größen von Produktionskapazitäten der neuen Betriebe damals benützen, wenn die Parameter der Zielfunktion wie der Nebenbedingungen als bekannt vorausgesetzt werden. Die weiteren Modelle kann man zur Optimierung der Größen von Produktionskapazitäten der neuen Betriebe auch damals benützen, wenn manchere von Parameter der Nebenbedingungen als Zufallsvariablen zu interpretieren sind.

Die Wortformulierung eines Problems

Ein Betrieb will sein Produktionsprogramm um ein neues Produkt erweitern. Die neuen Betriebe für die Herstellung dieses Produktes kann man auf p Plätzen aufbauen.Wir werden voraussetzen, daß:

- für die Herstellung dieses Produktes verbraucht man m Materialen
- wir bezeichnen der Verbrauch an Kapazität von Material t für die Herstellung einer Einheit von Produkt mit a_t ($t = 1, 2, \dots , m$)
- jedes Material kann man von mehreren Lieferanten bekommen:
  - das erste Material kann man von n_1 Lieferanten bekommen; die jährliche Lieferantkapazität bezeichnen wir mit M_{1i} ($i = 1, 2, \dots, n_1$)
  - das zweite Material kann man von n_2 Lieferanten bekommen; die jährliche Lieferantkapazität bezeichnen wir mit M_{2j} ($j = 1, 2, \dots, n_2$), usw.
  - das m-te Material kann man von n_m Lieferanten bekommen; die jährliche Lieferantkapazität bezeichnen wir mit M_{mf} ($f = 1, 2, \dots, n_m$)
- die Betriebe werden Produkt s Kunden liefern; jährliche Bedarfe der Kunden bezeichnen wir mit $B_1, B_2, \dots , B_s$,
- die Kosten für den Transport einer Mengeneinheit des Materials t von Lieferanten k nach Betrieb r betragen c_{tkr} Geldeinheiten

- die Kosten für den Transport einer Mengeneinheit des Produkts von Betrieb r nach Kunden g betragen d_{rg} Geldeinheiten
- die Produktionskosten für die Herstellung einer Einheit von Produkt im Betrieb r betragen c_r Geldeinheiten.

Gesucht sind Größen der Produktionskapazitäten der neuen Betrieben so, daß:

- alle Bedarfe der Kunden befriedigt werden
- Transportpläne der Materialen und des Produkts kostenminimal werden
- Produktionskosten minimal werden.

Die Mathematischformulierung des Problems als deterministisches Modell

Bezeichnen wir:

- mit x_{tkr} die von Lieferanten k nach Betrieb r zu transportierenden Mengeneinheiten des Materials t
- mit y_{rg} die von Betrieb r nach Kunden g zu transportierenden Mengeneinheiten des Produkts
- mit Y_r die jährliche Produktionskapazität des Betriebs r,

so kann das Problem mathematisch wie folgt formuliert werden:

Minimiere $$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y}) = \sum_{i,r} c_{1ir}x_{1ir} + \sum_{j,r} c_{2jr}x_{2jr} + \underset{f,r}{\dots} + \sum c_{mfr}x_{mfr} + \sum_{r,g} d_{rg}y_{rg} + \sum_{r} c_r\, Y_r \qquad (1)$$

$$(i = 1, 2, ..., n_1\,;\ j = 1, 2, ..., n_2\,;\ ...\,;\ f = 1, 2, ..., n_m)$$
$$(r = 1, 2, ..., p\,;\ g = 1, 2, ..., s)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{r=1}^{p} x_{tkr} \le M_{tk}, \qquad (t = 1, 2, ..., m\,;\ k = 1, 2, ..., n_t) \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n_t} x_{tkr} = a_t\, Y_r, \qquad (t = 1, 2, ..., m\,;\ r = 1, 2, ..., \mathrm{p}) \qquad (3)$$

$$\sum_{g=1}^{s} y_{rg} = Y_r, \qquad (r = 1, 2, ..., p) \qquad (4)$$

$$\sum_{r=1}^{p} y_{rg} = B_g, \qquad (g = 1, 2, ..., s) \qquad (5)$$

$$q_r \le Y_r \le Q_r, \qquad (r = 1, 2, ..., p) \qquad (6)$$

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \le x_{tkr}, & (t = 1, 2, ..., m\,;\ k = 1, 2, ..., n_t\,; \\ & \ r = 1, 2, ..., \mathrm{p}) \\ 0 \le y_{rg}, & (r = 1, 2, ..., p\,;\ g = 1, 2, ..., s) \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Die Zielfunktion (1) fordert die Minimierung der Gesamttransportkosten und der Produktions-kosten.Die Nebenbedingungen:

- (2) bedeuten, daß die vorhandenen Lieferantkapazitäten nicht überfordert werden,
- (3) bedeuten, daß jeder Betrieb soviel Material bekommt, wieviel er braucht,
- (4) bedeuten, daß jeder Betrieb die von Produkt zu fertigenden Mengeneinheiten expediert,
- (5) bedeuten, daß die Bedarfe der Kunden befriedigt werden.

In den Nebenbedingungen (6) sind die Beschränkungen der Größen von Produktionskapazitäten für einzelne Betriebe angeführt.

Die Nebenbedingungen (7) bedeuten, daß negative Liefermengen nicht zugelassen sind.

Die Mathematischformulierung des Problems als stochastisches Modell mit mancheren diskreten Zufallsvariableparametern

Wir werden voraussetzen, daß jährliche Bedarfe der Kunden als diskrete Zufallsvariablen zu interpretieren sind. Das heißt, daß B_g (g = 1, 2, ..., s) eine Zufallsvariable ist, die nur diskrete Werte b_{ge} (g = 1, 2, ..., s ; e = 1, 2, ... , h) annehmen wird. Mit p_{ge} werden wir die Wahrscheinlichkeit des Wertes b_{ge} bezeichnen.

Das Ziel ist, vermöge der obigen Voraussetzung, einen Transportplan aufzustellen,

- mit Hilfe dessen alle Anforderungen der Kunden maximal erfüllt werden,
- der die Gesamttransportkosten und die Produktionskosten minimiert
- und der die Größen der Produktionskapazitäten der neuen Betrieben optimiert.

Nach der Realisation eines Transportplans kann eine von dreien Situationen eintreten:

- der Kunde g wird befriedigt
- der Kunde g wird nicht befriedigt, es fehlt ihm u_{ge} Einheiten von Produkt
- der Kunde g hat v_{ge} Einheiten von Produkt nicht übernehmen. Er bekam mehr Einheiten von Produkt wie er forderte.

Bezeichnen wir:

- mit d_g die Kosten (Pönale) für die ungelieferte Produkteinheit nach Kunde g
- mit z_g die Lagerhaltungskosten einer Produkteinheit, die der Kunde g nicht übernehmen hat,

so läßt sich die Summe der Pönalien und der Lagerhaltungskosten mathematisch wie folgt formulieren:

$$\sum_{g=1}^{s} [\, d_g \sum_{e=1}^{h} p_{ge}\, u_{ge}, +\ z_g \sum_{e=1}^{h} p_{ge} v_{ge}] \qquad (8)$$

Gesucht sind nichtnegative Werte der Variablen u_{ge} und v_{ge} so, daß die Summe (8) unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{r=1}^{p} y_{rg} + u_{ge} - v_{ge} = b_{ge}\,, \qquad (g = 1, 2, \dots , s\,;\ e = 1, 2, \dots, h) \qquad (9)$$

$$\sum_{g=1}^{s} \sum_{e=1}^{h} (v_{ge} - u_{ge}) = h \sum_{r=1}^{p} Y_r - \sum_{g=1}^{s} \sum_{e=1}^{h} b_{ge}, \qquad (10)$$

minimiert wird.

Vermöge der mathematischen Formeln (8) – (10) können wir das Modell (1) – (7) so zurechtmachen, daß wir:

- durch Addition der matematischen Formeln (1) und (8) eine neue Zielfunktion schaffen
- die Nebenbedingung (5) auslassen
- die Gleichungen (9) und (10) als neue Nebenbedingungen Modells formulieren.

Nach der Realisation der obigen Änderungen hat das Modell folgendes Aussehen:

Minimiere $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_{i,r} c_{1ir}x_{1ir} + \sum_{j,r} c_{2jr}x_{2jr} + \ldots + \sum_{f,r} c_{mfr}x_{mfr} + \sum_{r,g} d_{rg}y_{rg} + \sum_{r} c_r\, Y_r\ +$

$$+ \sum_{g} [\ d_g \sum_{e} p_{ge}\, u_{ge},+\ z_g \sum_{e} p_{ge}v_{ge}] \tag{11}$$

$$(i = 1, 2, ..., n_1\,;\ j = 1, 2, ..., n_2\,;\ ...\,;\ f = 1, 2, ..., n_m)$$
$$(\ r = 1, 2, ..., p\ ;\ g = 1, 2, ..., s\ ;\ \ e = 1, 2, ... , h)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{r=1}^{p} x_{tkr}\ \leq\ M_{tk}\,,\qquad (\ t = 1, 2, ..., m\ ;\ \ k = 1, 2, ..., n_t\,) \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{n_t} x_{tkr}\ =\ a_t\, Y_r\ ,\qquad (\ t = 1, 2, ..., m\ ;\ \ r = 1, 2, ..., \mathrm{p}\,) \tag{13}$$

$$\sum_{g=1}^{s} y_{rg}\ =\ Y_r\ ,\qquad (\ r = 1, 2, ..., p\,) \tag{14}$$

$$\sum_{r=1}^{p} y_{rg} + u_{ge} - v_{ge} = b_{ge}\,,\quad (g = 1, 2, ... , s;\ \ e = 1, 2, ..., h) \tag{15}$$

$$\sum_{g=1}^{s}\sum_{e=1}^{h}(v_{ge} - u_{ge})\ =\ h\sum_{r=1}^{p} Y_r - \sum_{g=1}^{s}\sum_{e=1}^{h} b_{ge} \tag{16}$$

$$q_r\ \leq\ Y_r\ \leq\ Q_r\ ,\quad (\ r = 1, 2, ..., p\,) \tag{17}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 0\ \leq\ x_{tkr}\,, & (\ t = 1, 2, ..., m\ ;\ \ k = 1, 2, ..., n_t\,;\ r = 1, 2, ... , p) \\ 0\ \leq\ y_{rg}\,, & (\ r = 1, 2, ..., p\,;\ g = 1, 2, ..., s\ ) \\ 0\ \leq\ u_{ge}\,, & (\ g = 1, 2, ..., s\,;\ e = 1, 2, ..., h\ ) \\ 0\ \leq\ v_{ge}\,, & (\ g = 1, 2, ..., s\,;\ e = 1, 2, ..., h\ ) \end{array}\right\} \tag{18}$$

Mittels des Modells kan man die Größen von Produktionskapazitäten neuer Betrieben auch auf solchen Fall optimieren, wenn jährliche Bedarfe der Kunden als diskrete Zufallsvariablen zu interpretieren sind.

Die Mathematischformulierung des Problems als stochastisches Modell mit mancheren diskreten und mancheren kontinuerlichen Zufallsvariableparametern

Jetzt werden wir voraussetzen, daß auch jährliche Lieferantkapazitäten der Materialien als Zufallsvariablen zu interpretieren sind. Das heißt, daß M_{tk} $(\ t = 1, 2, ..., m\ ;\ \ k = 1, 2, ..., n_t\,)$ eine Zufallsvariable ist, die dieWerte μ_{tk} annehmen wird. Im solchen Fall kann eine solche Situation entstand, daß jährliche Bedarfe der Betrieben größer als jährliche Lieferantkapazitäten der Materialien sind. Die Größen jährlicher Lieferantkapazitäten der Materialien kann man gegebenenfalls so festlegen, daß jährliche Bedarfe der Betrieben größer als jährliche Lieferantkapazitäten der Materialien mit vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten $1 - \alpha_{tk}$ nicht sein werden. Mathematisch kann man diese Bedingung wie folgt formulieren:

$$P\left(\sum_{r=1}^{p} x_{tkr} \leq \mu_{tk}\right) \geq 1 - \alpha_{tk}, \quad (t = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n_t) \tag{19}$$

Wenn die Zufallsvariablen M_{tk} $(t = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n_t)$ die Normalverteilung mit dem Mittelwert $E(\mu_{tk})$ und der Varianz $Var(\mu_{tk})$ haben, können wir die stochastischen Ungleichungen (19) wie folgt unformulieren:

$$\sum_{r=1}^{p} x_{tkr} \leq E(\mu_{tk}) + Var(\mu_{tk}) u_{\alpha_{tk}}, \quad (t = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n_t) \tag{20}$$

Die Werte $u_{\alpha_{tk}}$ kann man für die zuständigen Wahrscheinlichkeiten α_{tk} aus der Tabelle von Zufallszahlen der Normalverteilung feststellen.

Falls wir die Nebenbedingung (12) von obigem Modell auslassen und die Ungleichungen (20) als neue Nebenbedingungen (22) Modells formulieren, bekommen wir ein neues Modell, das wir wie folgt formulieren können:

Minimiere $$F(\boldsymbol{x,y,Y,u,v}) = \sum_{i,r} c_{1ir}x_{1ir} + \sum_{j,r} c_{2jr}x_{2jr} + ... + \sum_{f,r} c_{mfr}x_{mfr} + \sum_{r,g} d_{rg}y_{rg} + \sum_{r} c_r Y_r +$$
$$+ \sum_{g} \left[d_g \sum_{e} p_{ge} u_{ge}, + z_g \sum_{e} p_{ge} v_{ge} \right] \tag{21}$$

$$(i = 1, 2, ..., n_1;\ j = 1, 2, ..., n_2;\ ...;\ f = 1, 2, ..., n_m)$$
$$(r = 1, 2, ..., p;\ g = 1, 2, ..., s;\ e = 1, 2, ..., h)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{r=1}^{p} x_{tkr} \leq E(\mu_{tk}) + D(\mu_{tk}) u_{\alpha_{tk}}, \quad (t = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n_t) \tag{22}$$

$$\sum_{k=1}^{n_t} x_{tkr} = a_t Y_r, \quad (t = 1, 2, ..., m;\ r = 1, 2, ..., \mathrm{p}) \tag{23}$$

$$\sum_{g=1}^{s} y_{rg} = Y_r, \quad (r = 1, 2, ..., p) \tag{24}$$

$$\sum_{r=1}^{p} y_{rg} + u_{ge} - v_{ge} = b_{ge}, \quad (g = 1, 2, ..., s;\ e = 1, 2, ..., h) \tag{25}$$

$$\sum_{g=1}^{s} \sum_{e=1}^{h} (v_{ge} - u_{ge}) = h \sum_{r=1}^{p} Y_r - \sum_{g=1}^{s} \sum_{e=1}^{h} b_{ge} \tag{26}$$

$$q_r \leq Y_r \leq Q_r, \quad (r = 1, 2, ..., p) \tag{27}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \leq x_{tkr}, & (t = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n_t;\ r = 1, 2, ..., p) \\ 0 \leq y_{rg}, & (r = 1, 2, ..., p;\ g = 1, 2, ..., s) \\ 0 \leq u_{ge}, & (g = 1, 2, ..., s;\ e = 1, 2, ..., h) \\ 0 \leq v_{ge}, & (g = 1, 2, ..., s;\ e = 1, 2, ..., h) \end{array}\right\} \tag{28}$$

Dieses Modell kann man zur Optimierung der Größen von Produktionskapazitäten neuer Betriebe auch damals benützen, wenn jährliche Bedarfe der Kunden und jährliche Lieferantkapazitäten der Materialien als Zufallsvariablen zu interpretieren sind.

Schlußbemerkungen

Bei der Optimierung der Größen von Produktionskapazitäten neuer Betriebe haben wir vorausgesetzt, daß sowohl die Zielfunktionen als auch die Nebenbedinungen obenangeführter Modelle linear sind. Diese Voraussetzung macht möglich zur Lösung dieser Modelle die Simplex – Methode benützen. In der Praxis können auch nichtlineare Optimierungsprobleme vorkommen. Aber zur Lösung dieser Probleme existiert kein (der Simplex – Methode vergleichbares) universelles Verfahren.

Literatur:

[1] DOMSCHKE, W. – DREXL, A. *Einführung in Operations Research.* Berlin: Springer - Verlag Heidelberg New York Tokyo 1991.

[2] IVANIČOVÁ, Z.- BREZINA, I. – PEKÁR, J. *Operačný výskum.* Bratislava: Edícia EKONÓMIA, vyd. IURA EDITION, 2002.

[3] GROS, I. *Kvantitativní metody v manažerském rozhodování.* Grada Publishing a. s., 2003.

[4] KORDA, B. a kol. *Matematické metody v ekonomii.* Praha: SNTL/SVTL, 1967.

[5] SAKÁL, P. – JERZ, V. *Operačná analýza v praxi manažéra*. SP SYNERGIA. Trnava: Tripsoft, 2003.

[6] ZIMMERMANN, H. J. *Methoden und Modelle des Operations Research.* Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1987.