O VZORCOCH A ROVNICIACH V NÁUKE O OBRÁBANÍ

ABOUT FORMULAS AND EQUATIONS IN MACHINING THEORY

Zdenko LIPA

Autor: ***Prof. Ing. Zdenko Lipa, CSc.***
Pracovisko: ***Ústav výrobných technológií, Katedra obrábania a montáže, Materiálovotechnologická fakulta STU***
Adresa: ***J. Bottu 25, 917 24 Trnava, Slovenská republika***
Tel.: ***+421 33-5521019***
E-mail: ***zdenko.lipa@stuba.sk***

Abstract

Náuka o obrábaní sa zoberá aj skúmaním vzťahov medzi veličinami, ktoré ovplyvňujú proces obrábania. Medzi takýmito veličinami je vždy jedna, ktorej hodnotu hľadáme (je neznáma) a my hľadáme jej súvis s veličinami ostatnými (známymi). Tento súvis vyjadrujeme rôznymi typmi rovníc a ich riešenia sú vlastne vzorcami na výpočet hľadaných veličín. Rovnice takéto môžu byť rôzne, algebraické (polynomické), transcendentné (najmä goniometrické), diferenciálne (tých je zatiaľ najmenej) a vzorce potom ako riešenia týchto rovníc tiež majú tomu zodpovedajúcu povahu funkcií (algebraických, transendentných,..). Niekedy však rovnicu teoreticky určiť nevieme a opierame sa len o empíriu a štatistické metódy hľadania príslušného vzťahu a vzorca (napríklad metódou najmenších štvorcov). Získané vzorce však často iritujú prírodovedcov a teoretickejšie založených technikov pre ich faktickú fyzikálnu (i matematickú) nekorektnosť, napriek tomu, že dávajú omnoho presnejšie výsledky než vzťahy a vzorce teoretické (a tým po všetkých stránkach korektné) a preto sú empirické vzorce praktickými technikmi veľmi obľúbené. Náš príspevok sa tiež okrem analýzy používaných vzorcov chce dotknúť možnosti skorektnenia (z matematicko-fyzikálneho hľadiska) uvedených empirických vzorcov.

Machining theory deals also with research of relations between quantities influencing the machining process. Among such quantities is always one, we are searching its valve (it is unknown) and we are also searching its relations to further quantities (known). This relation(s) we express by various types of equations, and some of their mode (general solution) are as a matter of fact, formulas for calculation of searched quantities. Such equations can be various, algebraic (polynomial), transcendent (mainly goniometric), diferential (they are in minority) and formulas, as a general solutions of these equations are also in form of relevant relations (algebraic, transcendent,..). Sometimes we do not know to determine the equation theoretically, so we based on empirism and statistical methods of appropriate relation and formula searching (e. g. on least squares method). But obtained formulas often irritate the scientist and more theoretical based technicians, because these formulas are physically (and mathematically) incorrect, in spite of the fact, that they given much exact results than theoretical relations and formulas (at all points correct), that is the reason, that empiric formulas are popular between practical technicians. Our contribution wants, besides utilized formulas analysis, handle with the possibilities to do more correct (from mathematical and physical aspect) the introduced empiric formulas.

Key words

vzorce, rovnica, obrábanie, empirický vzorec, korektnosť empirického vzorca

formulas, equation, machining, empiric formula, correctness of empiric formula

Úvod

Proces obrábania je ovplyvňovaný veľkým množstvom tu vystupujúcich veličín, ktoré môžeme súhrnne nazvať zúčastnené veličiny. Niektoré takéto veličiny (ich hodnoty) môžeme pre proces obrábania zvoliť (dajú sa nastaviť ich hodnoty na používanom technologickom zariadení – obrábacom stroji), iné si pomocou známych zákonitostí vieme určiť priamo výpočtom (a tiež ich môžeme počítať k veličinám známym), avšak existujú aj veličiny, ktorých hodnoty v nastavenom procese obrábania nepoznáme, no a tieto podrobujeme skúmaniu teoretickému i experimentálnemu, najmä z pohľadu dostupnosti príslušnej teoretickej či experimentálnej metódy. Pokiaľ sa dá, začíname metódami teoretickými, ktoré nie sú také nákladné ako metódy experimentálne. Musíme však mať na pamäti, že teoretický výskum sa musí opierať o isté vhodne volené zjednodušenia a výsledok teda bude zaťažený nepresnosťou vyplývajúcou z použitej idealizácie procesu obrábania. Teda experimentálny výskum dáva presnejšie výsledky, tieto výsledky však možno zužitkovať aj v príslušných teoretických úvahách, čím sa môže teória spresňovať. A naopak, teoretický výskum dáva podnety a požiadavky na výskum experimentálny, čím sa tieto dva vzájomne podmieňujú a sú vzájomne prínosné. Čistá empíria bez teórie a naopak (čistá teória bez experimentov) sú málo účinné a ich samostatnosť je objektívne nežiaduca.

Štruktúra náuky o obrábaní a vzťahy (vzorce a rovnice) v nej používané

Náuka o obrábaní býva vykladaná spravidla tak, že po objasnení základných pojmov nasleduje prvý kurz teórie procesu obrábania viac menej ako príprava pojmového aparátu pre nasledovné kapitoly zaoberajúce sa opisom rôznych metód obrábania včítane používaných strojov a nástrojov. Potom spravidla nasleduje druhý (podrobnejší) kurz teórie procesu obrábania, ktorý sa zvykne označovať ako samostatná disciplína s názvom Teória obrábania. Vzťahy používané v prvom či druhom uvedenom kurze môžeme klasifikovať podľa jednotlivých tematických celkov uvádzaných v uvedených kurzoch.

Prvým uvádzaným celkom v teórii procesu obrábania býva **tvorenie a tvarovanie triesky.** Tu bývajú predstavované rôzne modely, v popise ktorých nechýbajú trigonometrické vzťahy, čo vedie spravidla na goniometrické rovnice. Ak trigonometrické vzťahy niekedy nie sú uvažované, tak dostávame rovnice algebrické. Keďže niektoré veličiny uvažujeme všeobecne, máme vlastne rovnice s parametrami a ich riešenia sú funkcie (nie čísla) algebraické i trancendentné. Takto sa počítajú veličiny: hrúbka triesky, šírka triesky, prierez triesky, stlačenie triesky a i. V niektorých spôsoboch obrábania, ako je napríklad brúsenie, počítame strednú hrúbku triesky pripadajúcu na jedno brúsne zrno. Tu je zložitá situácia v dôsledku toho, že brúsne zrná nemajú definované tvary, rozmery, polohy, rozmiestnenia, ba ani počet a toto všetko sa musí udávať len nejakým intervalom a tak teoreticky stanové vzťahy dávajú výsledky líšiace sa aj niekoľkonásobne od výsledkov získaných experimentálne. Napríklad spomínaná stredná hrúbka triesky pripadajúca na jedno brúsne zrno v teoretickom vzorci dáva až desaťkrát nižšie hodnoty ako tie, ktoré sú získané experimentálne [1]. Rozpor bol riešený fenomenologicky, čo je metóda spájajúca teoretické úvahy s experimentálnym zisťovaním, čiže teoreticky získaný vzorec treba ešte dopracovať experimentálne stanovením konštánt a prípadne aj konštantných exponentov. Pre strednú hrúbku triesky pripadajúcu na jedno brúsne zrno guľovitého tvaru $a_{z\ str}$ potom pripadá vzťah v podobe mocninnej funkcie [2]

$$a_{z\ str} = 0{,}08 \frac{v_{fw}^{0,4} \cdot a_p^{0,4}}{v_c^{0,4} \cdot N_k^{0,4} \cdot \rho^{0,2} \cdot l_k^{0,4}} \qquad [\mathrm{mm}] \quad , \tag{1}$$

kde v_{fw} je posuvová rýchlosť (rýchlosť pozdĺžneho posuvu) [m/min],
a_p je hĺbka rezu [mm],
v_c je rezná rýchlosť [m/s],
N_k je hustota zŕn v brúsnom kotúči [-],
ρ je menovitý polomer brúsneho zrna [mm],
l_k je dĺžka stykového oblúka brúsneho kotúča s obrobkom [mm].

Ďalším rozoberaným problémom v teórii procesu obrábania sú **rezné sily, momenty a výkon obrábania.** Z analýzy silových pomerov v zóne vzniku triesky môžeme napísať rovnice rovnováhy zložiek reznej sily, čo spravidla vedie k riešeniu istých transcendentných (goniometrických) rovníc ale i rovníc algebraických s iracionálnymi koeficientami. Zriedkavo bývajú uvádzané aj diferenciálne rovnice pre reznú silu. Tu bola obdržaná lineárna diferenciálna rovnica obyčajná prvého rádu s pravou stranou i bez pravej strany, navzdory očakávaniu niektorých bádateľov, ktorí očakávali príslušnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu. Avšak, ak na teleso pôsobia sily (iné teleso), sily pružnosti majú matematický popis – charakter algebraickej rovnice (vyplývajú z Hookovho zákona popísaného algebraickou rovnicou), sily odporu majú matematický popis – charakter diferenciálnej rovnice (lineárnej diferenciálnej rovnice prvého rádu), sily zotrvačnosti majú matematický popis – charakter diferenciálnej rovnice (lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu ako všetky sily pre transport tuhých látok). Rezné sily vyvolávajúce v obrábanom materiáli rezné odpory však nemajú charakter transportu tuhých látok, ale majú charakter síl odporu (ako sú aj sily trenia) a ich popísanie lineárnou diferenciálnou rovnicou obyčajnou prvého rádu s pravou stranou i bez pravej strany je teda adekvátne. Napríklad pôvodca tohoto článku (príspevku) odvodil diferenciálnu rovnicu reznej sily pri vŕtaní a získal vzťah [3].

$$\frac{dF}{dk} - \frac{\sin\eta}{k^2 \cdot \cos\eta \cdot \cos\gamma_0 + k\sin\gamma} \cdot F = 0 \,, \tag{2}$$

jej riešenie je

$$F = \frac{C \cdot k}{\sin\eta + k\cos\eta \cdot \cos\gamma_0} \,, \tag{2a}$$

kde F je výsledná rezná sila pri vŕtaní [N],
k je stlačenie triesky (pomer hrúbky triesky k hĺbke rezu) [-],
η je trecí uhol [°],
γ_0 je nástrojový ortogonálny uhol čela nástroja [°],
C je integračná konštanta [N].

Integračnú konštantu C ešte ďalej možno vyjadriť ako súčin bezrozmernej konštanty C_0, hĺbky rezu a_p, posuvu f a medze pevnosti v ťahu R_m.

Pre jednotlivé zložky rezných síl, krútiace momenty i energetický výkon rezania sú zaužívané v náuke o obrábaní mocninné vzorce, napríklad pre hlavnú zložku reznej sily [4] pri sústružení

$$F_C = C_{Fc} \cdot a_p \cdot f^{0,75} \quad [\mathrm{N}]\ , \tag{3}$$

kde F_C je hlavná zložka reznej sily [N],
C_{Fc} je konštanta,
a_p je hĺbka rezu [mm],
f je posuv [mm].

Teplo a teplota rezania sú ďalšou čiastkou v rámci teórie obrábania. Pre teplo stanovená rovnica tepelnej bilancie je rovnica algebraická. Pre teplo a teplotu rezania býva uvádzaná aj diferenciálna rovnica vedenia tepla. No teplota rezania sama býva často uvádzaná ako mocninná funkcia [5]. Pre obrábanie ocelí býva

$$\Theta_r = C_{\Theta r} \cdot v_c^{0,4} \cdot a_p^{0,1} \cdot f^{0,24} \quad [°\mathrm{C}]\ , \tag{4}$$

kde Θ_r je teplota rezania [°C],
$C_{\Theta r}$ je konštanta,
v_c je rezná rýchlosť [m/s],
a_p je hĺbka rezu [mm],
f je posuv [mm].

Ďalšou čiastkou teórie procesu obrábania je **drsnosť a presnosť**. Z geometricko-kinematických pomerov sa stanovuje maximálna výška nerovnosti *Rz* ako vzorec algebraický alebo vzorec trigonometrický, uvažovaním tzv. zbytkového hrebienka (ako pozostatok po obrábaní) v tvare trojuholníkov. Stredná aritmetická odchýlka profilu drsnosti povrchu *Ra* sa stanovuje buď obdobne ako *Rz* alebo pomocou empirickej formuly (mocninný vzorec) [6]:

$$Ra = C_{Ra} \cdot f^{y_{Ra}} \cdot v_c^{Z_{Ra}} \cdot r_\varepsilon^{q_{Ra}} \quad [\mu\mathrm{m}]\ , \tag{5}$$

kde C_{Ra} je konštanta,
y_{Ra}, z_{Ra}, q_{Ra} sú konštantné exponenty,
r_ε je polomer hrotu rezného klina nástroja [mm],
ostatné parametre boli už vysvetlené vyššie.

Aj **Tuhosť a chvenie** ako ďalšia čiastka teórie procesu obrábania sa stanovuje algebraickými rovnicami (najmä tuhosť), diferenciálnymi rovnicami (najmä chvenie), ale vyskytujú sa znova i mocninné vzorce.

Ďalšie kapitoly **Trvanlivosť, životnosť, obrobiteľnosť a reznosť** sú založené mimo niekoľkých algebraických vzťahov na tzv. Taylorových rovniciach, ktorých riešením sú mocninné vzorce [7].

$$T = \frac{C_T}{v_c^m} \qquad [\mathrm{min}]\ , \tag{6}$$

$$T = \frac{C_{Taf}}{v_c^m \cdot a_p^{X_T} \cdot f^{Y_T}} \quad [\min] \; , \tag{7}$$

kde T je trvanlivosť rezného klina nástroja [min],
C_T, C_{Taf} sú konštanty,
m, x_T, y_T sú konštantné exponenty,
ostatné parametre už boli vysvetlené vyššie.

Taylorove rovnice možno vyjadriť i pomocou diferenciálnej rovnice [8]

$$\frac{dT}{dv_c} + \frac{m}{v_c} \cdot T = 0 \; , \tag{8}$$

kde jej riešenie je v známom tvare $T = \dfrac{C_T}{v_c^m}$.

Možno uviesť aj racionalizovaný tvar Taylorovej rovnice a to

$$T = T_0 \cdot \left(\frac{v_{c0}}{v_c} \right)^m \; , \tag{9}$$

kde T_0 je etalónová trvanlivosť a v_{c0} je etalónová rezná rýchlosť.

Poslednou čiastkou teórie obrábania býva výklad **optimalizácie procesu obrábania.** Tam sa vlastne zužitkujú vzťahy z predchádzajúcich kapitol teórie obrábania. Ak sa však použijú mocninné vzorce s exponentami v tvare neúplných čísel (alebo čísel iracionálnych), možno pri optimalizačných výpočtoch dôjsť k paradoxným rovniciam, kde vystupujú súčty veličín s rôznymi rozmermi a podobne.

Všetky uvedené nekorektnosti sa budeme snažiť dať na pravú mieru v nasledujúcej kapitole.

Problematika korektnosti mocninných vzorcov v náuke o obrábaní

Zo všetkých tu uvádzaných rovníc a vzorcov sú diskutabilné pre svoju možnú nekorektnosť len mocninné vzorce. Keďže tieto mocninné vzorce obsahujú konštanty a konštantné exponenty, ktoré sa vypočítavajú z podmienok a výsledkov experimentov, a ak tieto konštanty a exponenty sú buď iracionálne čísla alebo racionálne čísla s neúplným vyčíslením, tak takéto exponenty nad rozmerovými veličinami dávajú nekorektné vyjadrenie. Aj racionálne čísla s vysokými hodnotami čitateľa p a menovateľa q, ak ich vyjadríme v tvare zlomku p/q, môžu priniesť komplikácie, pretože žiadna fyzikálna veličina (z ktorých sa skladá mocninný vzorec) nebýva uvažovaná s takto umocnenými fyzikálnymi jednotkami (napr. vo vzorci (4) by mal byť uvažovaný rozmer $m^{0,4} \cdot \min^{-0,4} \cdot mm^{0,34}$, čo nie je korektné).

Rozmerová fyzikálna veličina alebo rozmerový komplex fyzikálnych veličín (zoskupenie fyzikálnych veličín pod jednu mocninu) nemôžu byť povýšené na ľubovoľný exponent ale len na celočíselný exponent alebo racionálny exponent p/q s malými hodnotami p a q (p, q < 6, výnimočne p, q < 15).

Problém možno riešiť celkom jednoducho tak, že budeme uvažovať nezávisle premenné veličiny v mocninných vzorcoch ako veličiny relatívne bezrozmerné (ich prevedenie do bezrozmerného tvaru možno urobiť prostriedkami dimenzionálnej analýzy a tak možno získať bezrozmerné veličinové komplexy, kde v čitateli a v menovateli komplexu sú súčiny rôznorozmerných veličín) alebo bezrozmerné veličinové symplexy (kde v čitateli je fyzikálna veličina takého istého rozmeru ako v menovateli a môže byť samozrejme i takého istého druhu). Bezrozmerné veličiny potom môžeme umocňovať na ľubovoľný exponent a dimenzionálna homogenita (koherentnosť) takéhoto vzorca sa nemení (dimenzia ľavej strany sa vlastne rovná dimenzii rozmerovej konštanty vystupujúcej v príslušnom vzorci na pravej strane).

Tak môžeme obdržať miesto vzorcov (1), (3), (4), (5), (6), (7), vzorce nasledovné

$$a_{z\ str} = 0{,}08 \cdot \left(\frac{v_{fw} \cdot a_p}{v_c \cdot l_k \cdot N_k} \right)^{0,4} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \right)^{0,2} , \qquad (10)$$

$$F_C = C'_{Fc} \cdot a_p \cdot \left(\frac{f}{f_0} \right)^{0,75} , \qquad (11)$$

$$\Theta_r = C'_{\Theta r} \cdot \left(\frac{v_c}{v_{c0}} \right)^{0,4} \cdot \left(\frac{a_p}{a_{p0}} \right)^{0,1} \cdot \left(\frac{f}{f_0} \right)^{0,24} , \qquad (12)$$

$$Ra = C'_{Ra} \cdot \left(\frac{f}{f_0} \right)^{y_{Ra}} \cdot \left(\frac{v_c}{v_{c0}} \right)^{Z_{Ra}} \cdot \left(\frac{r_\varepsilon}{r_{\varepsilon 0}} \right)^{q_{Ra}} , \qquad (13)$$

$$T = C'_T \cdot \left(\frac{v_{c0}}{v_c} \right)^m ,$$

$$T = C'_{Taf} \cdot \left(\frac{v_{c0}}{v_c} \right)^m \cdot \left(\frac{a_{p0}}{a_p} \right)^{X_T} \cdot \left(\frac{f_0}{f} \right)^{Y_T} , \qquad (14)$$

v týchto vzorcoch je ešte:

f_0 - etalónový posuv [mm],
v_{c0} - etalónová rezná rýchlosť [m/min],
a_{p0} - etalónová hĺbka rezu [mm],
$r_{\varepsilon 0}$ - etalónový polomer hrotu [mm],
ostatné parametre už boli vysvetlené vyššie.

Ešte je uvažovaný etalónový polomer brúsneho zrna $\rho_0 = 1$ mm.

Etalónové parametre sú myslené ako parametre v centre plánu v metóde plánovania experimentov. Aj takéto vzorce sa už v náuke o obrábaní vzácne vyskytujú. Uvádzajú ich Kroneneberg [9], Novoselov [10], Kumabe [11], Lipa (autor tohoto príspevku) [12], Vadovič [13] a ďalší ešte niekoľkí bádatelia. Pravda, väčšina bádateľov v obrábaní si nerobí starosti s dimenzionálnou nehomogenitou, nekoherentnosťou i fyzikálnou nekorektnosťou takýchto vzťahov a používajú ich bez obmedzenia, najmä z dôvodu ich väčšej presnosti vyplývajúcej z väčšej primknutosti k experimentom. Autor tohoto článku v niektorých príspevkoch tiež používa takéto vzťahy, pravda s vedomím, že sa veľmi jednoduchou úpravou ľahko dajú previesť na vzorce dimenzionálne korektné. Autor tohoto článku vypracoval aj metodiku priameho získavania dimenzionálne korektných vzorcov v metódach plánovania experimentu [14] tak, že zúčastnené veličiny uvádzal už ako relatívne, bezrozmerné. Obdržané vzorce s takto vedených a vyhodnocovaných vzorcov už netreba upravovať, už sú dimenzionálne korektné. Bolo by vhodné, keby sa zmienená autorova metodika zaviedla do skúmania metódami plánovania experimentov, čím by už nevznikali dimenzionálne nekorektné vzťahy a vzorce, čím by sa výklad aj v teórii obrábania stal presnejším a nevnášal by medzi rôznych bádateľov rozpory.

Vlastný vedecký prínos

Vlastným vedeckým prínosom príspevku je analýza používaných vzťahov, rovníc, vzorcov v náuke o obrábaní, vyčlenenie nekorektných vzťahov a návrh riešenia pre ich skorektnenie.

Záver

Náuka o obrábaní a najmä Teória obrábania používa rôzne matematické prostriedky a úlohou tiež je stanoviť hľadanú veličinu pomocou veličín známych, k čomu vedú používané rovnice a k čomu slúžia používané vzorce ako riešenia príslušných rovníc. Náuka o obrábaní zatiaľ málo používa vyšších matematických prostriedkov, napríklad diferenciálnych rovníc, ktoré zaručujú korektnosť získaných výsledkov, ak použitá diferenciálna rovnica je adekvátna pre riešenie daného problému. Empirické vzorce síce dávajú presnejšie výsledky, ale v prípade mocninných vzorcov vnášajú aj zmätok do teórie, ak nie je s nimi zachádzané opatrne s ohľadom na dimenzionálnu korektnosť, ktorá týmto vzorcom tiež nie je nedostupná. Treba len použiť adekvátne metódy uvedené aj v tomto príspevku. Tento príspevok vznikol v rámci grantu č. 1/4111/07 „Implantácia diferenciálnych a iných matematických metód do analytickej teórie obrábania“.

Zoznam bibliografických odkazov:

[1] PŘIKRYL, Z., MUSILKOVÁ, R. *Teorie obrábění*. Praha: SNTL, 1971.

[2] KISSOCZY, Š. Výpočet strednej hrúbky triesky. In *Zborník vedeckých prác SjF SVŠT.* Bratislava, 1964.

[3] LIPA, Z. *Príspevok k stanoveniu rezných síl pri vŕtaní. Kandidátska dizertačná práca*. Trnava: StF SVŠT, 1989.

[4] BUDA, J., BÉKÉS, J. *Teoretické základy obrábania kovov*. 2. vyd. Bratislava: ALFA, 1977.

[5] BÉKÉS, J. *Inžinierska technológia obrábania kovov*. Bratislava: ALFA, 1981.

[6] BÉKÉS, J., HRUBEC, J., KICKO, J., LIPA, Z. *Teória obrábania*. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 1999.

[7] BUDA, J., SOUČEK, J., VASILKO, K. *Teória obrábania*. 2. vyd. Bratislava: ALFA, 1988.

[8] JANÁČ, A., LIPA, Z., ROVDER, J. Príspevok k racionalizovaným, diferenciálnym a integrovaným Taylorovým rovniam. In *Zborník REZNÉ NÁSTROJE*. Prešov, 1994, SSS SVSVT.

[9] KRONENBERG, M. Grundzűge der Zerspannungslehre. Springer Berlin – Gőttingen – Heidelberg, B: 1-2, 1954, 1963.

[10] NOVOSELOV, J. A. Obščennaja metodika issledovanija režuščich sil. In *Mašinostrojenije*, r. 3, 1979.

[11] KUMABE, D. *Vibracionnoje rezanije (*preklad z japončiny). Moskva: Mašinostrojenije, 1985.

[12] LIPA, Z. Vzájomné vzťahy teoretickej a praktickej drsnosti sústruženého povrchu. In *Zborník medzinár. konf. TECHNOLÓGIA 2001*. Bratislava, SjF, 2001.

[13] VADOVIČ, F., LIPA, Z. Príspevok k novým metódam stanovenia rezných síl pri vŕtaní. In *Strojnícky časopis*, 1994, č. 3.

[14] LIPA, Z. Vplyv podmienok brúsenia na drsnosť povrchu plazmovostriekaných povlakov. In *Vedecké práce MtF STU, Zv. 10*. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2001.