O DIFERENCIÁLNYCH ROVNICÁCH V OBRÁBANÍ

ABOUT DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MACHINING

Zdenko LIPA, Katarína SIKETOVÁ

Autori: **Prof. Ing. Zdenko Lipa, CSc., Ing. Katarína Siketová**
Pracovisko: **Ústav výrobných technológií, Materiálovotechnologická fakulta STU**
Adresa: **J. Bottu 25, 917 24 Trnava, Slovenská republika**
E-mail: **zdenko.lipa@stuba.sk, katarina.siketova@stuba.sk**

Abstract

Príspevok si všíma posudzovanie teórie obrábania ako vedy a uvádza aj názor, že obrábanie nemá vedu, lebo nemá diferenciálne rovnice. Vedúci autor tohto príspevku však bez nároku na úplnosť znázorňuje 9 diferenciálnych rovníc v rôznych oblastiach teórie obrábania. Pri niektorých uvádza vedúci autor tohto príspevku aj ich riešenie, najmä u diferenciálnych rovníc, ktoré postavil on.

Contribution observes the theory of machining appraising as science and even shows the opinion, that machining has not science, because has not differencial equations. The first author of this paper presents 9 differencial equals in different areas of theory of machining. At some first author shows even resolution, particularly at these differential equals, that has built by him.

Key words

obrábanie, diferenciálna rovnica, vedecká disciplína, riešenie diferenciálnej rovnice

machining, differential equal, scientific discipline, resolution of differential equal

Úvod

Teória obrábania je vedecká disciplína. Má svoj objekt skúmania a má aj svoje metódy skúmania. Niektorí bádatelia však tvrdia, že má iba vedecké pozadie. Iní bádatelia tvrdia, že nie je vedou vôbec i keby sa nazvala vedou o obrábaní. Sú aj takí bádatelia, ktorí tvrdia, že obrábanie nie je veda ale umenie. Predmetom tohto článku však nie je polemizovať s uvedenými názormi. Niektorí bádatelia tvrdia, že tá disciplína, ktorý nepoužíva diferenciálne rovnice, nie je vedecká. A vraj obrábanie preto nemôže byť vedecké, lebo nepoužíva diferenciálne rovnice.

Takéto tvrdenie však vyplýva len z neznalosti problematiky s ktorou obrábanie pracuje. V obrábaní totiž možno nájsť oblasti, kde sú diferenciálne rovnice uplatnené i kde sa s diferenciálnymi rovnicami pracuje. Tak z toho potom vyjde to, že aj obrábanie má svoju vedu.

Toto je síce vlastne kuriózne tvrdenie prečo by malo mať obrábanie svoju vedu, ale tento príspevok iba hľadá miesta použitia diferenciálnych rovníc v obrábaní a nechce sa tomto základe čokoľvek tvrdiť (o vedách či nevedách). Nám ide len o tie diferenciálne rovnice v obrábaní, o nič iné.

Teória obrábania a diferenciálne rovnice

Teória obrábania sa delí na niekoľko kapitol (oblastí), ktoré môžu,ale nemusia operovať s diferenciálnymi rovnicami. Prvou kapitolou býva náuka o tvorení a tvarovaní triesok. K tomu býva pridružená podkapitola o úbere materiálu. A práve tam hlavný autor tohto príspevku situoval použitie diferenciálnych rovníc. Pre úber materiálu (hĺbku rezu a_p) pri superfinišovaní odvodil diferenciálnu rovnicu Bernouliho typu [1]:

$$\frac{da_p}{dt_r} = ka_p - k_o a_p^2 \quad , \tag{1}$$

kde t_r je čas rezania a k, k_o sú konštanty.

Druhou kapitolou býva náuka o rezných silách. Tu možno nájsť použitie diferenciálnych rovníc. Pre trecie sily odvodili Danzeuberg, Weenstra a kolektív diferenciálnu rovnicu ako lineárnu diferenciálnu rovnicu obyčajnú s prvou stranou. Na jej riešenie použili numerické metódy podľa Rungeho a Kuttu.

Metódou analýzy vytknutého elementu možno tiež odvodiť diferenciálne rovnice pre rezné sily,ale pre praktickejšie použitie nie sú vhodné, lebo operujú všeobecnými napätiami pri rezaní ťažko stanoviteľnými.

Pre rezné sily prvý autor tohto článku odvodil lineárnu diferenciálnu rovnicu obyčajnú s pravou stranou ale i bez pravej strany (homogénnu) [2]:

$$F' + Q(\varphi_1, \gamma_0).F = Q_o(\varphi_1, \gamma_O, \eta, f, a_p) \quad , \tag{2}$$

kde F je rezná sila

F' - jej derivácia podľa uhla medznej roviny deformácie φ_1

Q - funkcia parametrov φ_1, γ_0

γ_0 - nástrojový ortogonálny uhol čela rezného klina

η - trecí uhol

f - posuv

a_p - hĺbka rezu

Q_0 - funkcia parametrov φ_1, γ_0, η, f, a_p.

Jej riešenie je

$$F = e^{-\int Q d\varphi_1} . \left[\int Q_0 . e^{\int Q . d\varphi_1} . d\varphi_1 + C \right] \quad , \tag{3}$$

kde ešte C je integráčná konštanta.

Vhodným vyjadrením funkcií Q, Q_0 možno získať rôzne vzorce pre výpočet reznej sily. Vo všeobecnosti ale integrál v zátvorke vzťahu (3) nie je riešiteľný elementárnymi funkciami.

Pre $$Q = \frac{\cos\gamma_0}{\cos(\varphi_1 - \gamma_O).[\cos\varphi_1.\sin\eta + \cos\gamma_0.\cos\eta.\cos(\varphi_1 - \gamma_0)]} \tag{4}$$

však dostávame $Q_0 = 0$, čím sa riešenie zjednoduší.

Ďalšou kapitolou bývajú tepelné pomery pri obrábaní. Tu pre vedenie tepla možno použiť Fourierovu diferenciálnu rovnicu [3]

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\lambda}{C_p.\rho}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right) \ , \tag{5}$$

kde θ je teplota v uvažovanom bode teplotného poľa v zóne rezania
τ je čas
λ je tepelná vodivosť
C_p je merná tepelná kapacita
ρ je hustota
x, y, z sú súradnice uvažovaného bodu teplotného poľa.

Uvedená rovnica je parciálna diferenciálna rovnica a jej riešenie a tým stanovenie teploty rezania je po matematickej stránke dosť náročné.

Potom spravidla nasleduje kapitola o tuhosti technologickej sústavy stroj-nástroj-obrobok-prípravok.

Z diferenciálnej rovnice (stanovenej vedúcim autorom tohto príspevku) [2]:

$$\frac{dF}{dK} - \frac{\sin\varphi_1}{K^2.\cos\varphi_1.\cos\gamma_0 + K\sin\varphi_1}.F = 0 \ , \tag{6}$$

kde ešte K je stlačenie triesky.

Ako riešenie dostávame

$$F = \frac{c.K}{\sin\varphi_1 + K\cos\varphi_1\cos\gamma_0} \ . \tag{7}$$

Vyjadrením $$c = c_0.a_p.f.Rm \ ,$$

kde c_0 je konštanta a R_m je medza pevnosti v ťahu obrábaného materiálu bude náš originálny vzťah pre tuhosť j a radiálnu zložku reznej sily F_p a odtlačenie y:

$$j = \frac{F_p}{y} = \frac{F.\sin(\varphi_1 - \gamma_0)}{y} = \frac{c_0.a_p.f.R_m.K.\sin(\varphi_1 - \gamma_0)}{y.\sin\varphi_1 + yK\cos\varphi_1.\cos\gamma_0} \ . \tag{8}$$

V kapitole chvenie možno interpretovať ako diferenciálnu rovnicu vzťah [4]:

Pre oblasť vlastných kmitov

$$mX''+rX'+kX=0 \tag{9}$$

a pre oblasť vynútených kmitov [4]:

$$mX''+rX'+kX=P_0\cos\omega t\ , \tag{10}$$

kde m je hmotnosť kmitania a tak máme sily zotrvačnosti mX'', sily odporu rX' a sily pružnosti kX a vonkajšiu periodickú silu $P_0\cos\omega t$ (P_0 je jej amplitúda, "omega" kruhová frekvencia, t je čas), r je koeficient odporu, k je koeficient pružnosti a X je výchylka.

V kapitole drsnosť a presnosť pri obrábaní prvý autor tohto príspevku zistil, že v rámci superfinišovania platí diferenciálna rovnica [5]:

$$\frac{dRa}{dt_r}=-a_1Ra\ , \tag{11}$$

kde Ra je stredná aritmetická odchýlka profilu obrobeného povrchu a_1 je konštanta, t_r čas rezania.

Jej riešenie obohatené o opravné koeficienty pre tlak na nástroj p_s, pomer rýchlostí nástroja a obrobku q a zrnitosť nástroja d_s je dané vzťahom

$$Ra=(Ra_ae^{-a_1t_r}+Ra_b)p_s^{a_2}.q^{a_3}.d_s^{a_4}\ , \tag{12}$$

kde Ra_a je vstupná drsnosť pred superfinišovaním,
Ra_b je limitná drsnosť dosiahnuteľná superfinišovaním,
a_1, a_2, a_3, a_4 sú konštanty, ktoré treba zistiť experimentálne.

Vzťah (12) nie je však dimenzionálne homogénny.

Pre etalónové (zvolené) hodnoty p_{se}, q_e, d_{se} bude drsnosť Ra_e a potom bude

$$Ra=Ra_e.\frac{(Ra_ae^{-a_1t_r}+Ra_b)}{(Ra_ae^{-a_1t_{re}}+Ra_b)}\left(\frac{p_s}{p_{se}}\right)^{a_2}.\left(\frac{q}{q_e}\right)^{a_3}.\left(\frac{d_s}{d_{se}}\right)^{a_4}\ , \tag{13}$$

V kapitole opotrebenie a trvanlivosť nástroja T opäť prvý autor tohto príspevku odvodil deferenciálnu rovnicu [6]:

$$\frac{dT}{dv_c}+\frac{m}{v_c}T=O\ , \tag{14}$$

kde v_c je rovnaká rýchlosť, m je konštanta, pričom jej riešenie vyhovuje známemu tvaru

$$T=\frac{C_T}{v}\ , \tag{15}$$

kde C_T je konštanta, alebo

$$T=T_0\left(\frac{v_{c0}}{v_c}\right)^m\ , \tag{16}$$

kde T_0 je etalonová trvanlivosť a v_{c0} je etalonová rezná rýchlosť.

V kapitole obrobiteľnosť a reznosť sa vlastne využívajú výsledky z predchádzajúcich kapitol najmä z kapitoly o opotrebení a trvanlivosti, kde diferenciálne rovnice sú aplikované.

V kapitole o kinematike obrábania možno využiť diferenciálnu rovnicu harmonického pohybu, ktorý sa pre niektoré spôsoby obrábania môže využiť, napr. pre superfinišovanie máme diferenciálnu rovnicu harmonického pohybu:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \ , \qquad (17)$$

kde y je okamžitá výchylka superfinišovacieho kameňa,
ω - kruhová frekvencia harmonického pohybu,
t - čas.

Jej riešením je

$$y = a.\sin \omega t \ , \qquad (18)$$

kde ešte a je amplitúda (max. výchylka) superfinišovacieho kameňa. Na základe tohto môžeme stanoviť rýchlosť pohybu nástroja okamžitú a priemernú.

Záver

T tomto príspevku nie sú uvedené všetky možné diferenciálne rovnice v obrábaní. Je uvedených 9 diferenciálnych rovníc z rôznych oblastí obrábania. To možno pokladať v podstate za prijateľný výsledok a s takýmto stavom vysloviť predbežne spokojnosť. Zrejme vzniknú aj iné, ďalšie diferenciálne rovnice z oblasti obrábania kovov. To možno v budúcnosti očakávať. Príspevok vznikol v rámci riešenia grantového projektu ***„Implementácia diferenciálnych a iných matematických metód do analytickej teórie obrábania“***.

Zoznam bibliografických odkazov:

[1] LIPA, Z. *Formulácia a riešenie vybraných problémov teórie superfinišovania*. Habilitačná práca. Trnava: MtF STU, 1992, 101 s.
[2] LIPA, Z. *Príspevok k stanoveniu rezných síl pri vŕtaní.* Kandidátska dizertačná práca. Trnava: StF SVŠT, 1989, 250 s.
[3] KALČÍK, J., SÝKORA, K. *Technická termomechanika*. Praha: ACADEMIA, 1973, 540 s.
[4] BUDA, J., SOUČEK, J., VASILKO, K. *Teória obrábania*. 2. vydanie. Bratislava: ALFA, 1988, 392 s.
[5] LIPA, Z., BARÁNEK, I., MORAVČÍKOVÁ, J. Príspevok k teoretickej problematike superfinišovania. In *Vedecké práce MTF STU* , 2008, 7 s.
[6] LIPA, Z. O vzorcoch a rovniciach v náuke o obrábaní. In *Materials Science and Technology* [online]. 2/2008. Dostupné na internete http://www.mtf.stuba.sk/generate_page.php?page_id=2450 ISSN 1335-9053
[7] LIPA, Z., JANÁČ, A. *Dokončovacie spôsoby obrábania*. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2000, 97 s.